

**Isabella BARTOCCINI, Maurizia BERARDI, Maurizio COCCIA,  
Leonardo FAVILLI, Giovanni MANUALI, Stefania MENICONI,  
Alberto SIMONETTI, Claudio STELLA, Cecilia TACCHI,  
Guglielmo TINI, Raffaella VILLAMENA**

## **DANTE ATTRAVERSO**

### **Dialoghi e prospettive**



***Serate dantesche* alla Biblioteca Jacobilli**

**FOLIGNO 2021**

ISBN: 978-88-946749-1-0

*Redazione a cura di Antonio Nizzi*

**E-BOOK n.1 della Biblioteca *L. Jacobilli***



**BIBLIOTECA JACOBILLI**

Piazza San Giacomo 1 – 06034 FOLIGNO (PG)

Tel. 0742.340495

[info@jacobilli.it](mailto:info@jacobilli.it); [www.jacobilli.it](http://www.jacobilli.it)

Tutti i diritti riservati da **Biblioteca L. Jacobilli**

Foligno novembre 2021

## INDICE

Presentazione	p. 4
Il Programma	p. 6
GUGLIELMO TINI <i>Dante e il mondo classico. Il canto IV dell'Inferno</i>	p. 7
CLAUDIO STELLA <i>La suggestione poetica del Catone dantesco</i>	p. 12
CECILIA TACCHI <i>"Intra Tupino e l'acqua che discende". Il territorio e le generazioni</i>	p. 16
MAURIZIO COCCIA <i>Dante conteso Dante fraterno. Echi danteschi nella Foligno tra il sesto e il settimo centenario della morte</i>	p. 19
MAURIZIA BERARDI <i>Dante oggi al tempo del Covid. Insegnanti e studenti a confronto</i>	p. 36
GIOVANNI MANUALI <i>La Divina Commedia e i nuovi linguaggi</i>	p. 41
RAFFAELA VILLAMENA <i>Tecnologie e scienze mediche nella Commedia di Dante</i>	p. 52
LEONARDO FAVILLI <i>Smarginare il cosmo. Dante e la cosmonautica</i>	p. 60
ALBERTO SIMONETTI <i>"E quindi uscimmo ...". Arte e filosofia</i>	p. 64
ISABELLA BARTOCCINI <i>"Le cose tutte quante hanno ordine tra loro". I numeri nella Divina Commedia</i>	p. 74
STEFANIA MENICONI <i>Dante attraverso.... la geometria</i>	p. 89
Postfazione di ATTILIO TURRIONI	p. 108

## **Serate dantesche alla Biblioteca L. Jacobilli**

### **DANTE ATTRAVERSO ... Dialoghi e prospettive**

Gli insegnanti delle scuole di Foligno incontrano Dante  
attraverso le discipline dei loro istituti

#### **21 settembre**

"CHE DEL VEDERE IN ME STESSO M'ESSALTO" (Inf. IV, 120)

*Echi e suggestioni del mondo classico*

**Claudio Stella - Guglielmo Tini**

(Liceo classico Federico Frezzi – Beata Angela)

#### **28 settembre**

"INTRA TUPINO E L'ACQUA CHE DISCENDE" (Par. XI, 43)

*Il territorio e le generazioni*

**Maurizia Berardi - Maurizio Coccia - Cecilia Tacchi**

(I.T.E. Feliciano Scarpellini)

#### **30 settembre**

"SOLO DA SENSATO APPRENDE / CIÒ CHE POSCIA FA D'INTELLETTO  
DEGNO" (Par. IV, 41-42)

*La tecnologia e i nuovi linguaggi*

**Giovanni Manuali - Raffaella Villamena** (I.T.T. Leonardo da Vinci)

#### **5 ottobre**

"E QUINDI USCIMMO ..." (Inf. XXXIV, 139)

*Arte e filosofia*

**Leonardo Favilli - Alberto Simonetti** (I.P.I.A. Emiliano Orfini)

#### **7 ottobre**

"LE COSE TUTTE QUANTE /HANNO ORDINE TRA LORO" (Par. I, 103-104)

*Il linguaggio dei numeri e la geometria*

**Isabella Bartoccini - Stefania Meniconi**

(Liceo scientifico e artistico Guglielmo Marconi)

Introduce il prof. **Antonio Nizzi**

## DANTE ATTRAVERSO ... LA GEOMETRIA

### ORDINE

“Le cose tutte quante /hanno ordine tra loro” (Par. I, 103-104)

#### *Ordine o disordine?*

L'ordine di cui Beatrice parla in uno dei suoi primi discorsi dottrinali rivolti a Dante è certamente la chiave interpretativa della costruzione matematica e geometrica che sottende all'universo dantesco. Il poeta trovava questa certezza già nelle Sacre Scritture, se è vero che il Libro della Sapienza così si rivolge a Dio: “*Ma tu hai tutto disposto con misura, calcolo e peso*” (Sap. 11, 20).

L'idea di un universo ordinato del resto doveva essere per Dante anche un modo di superare il disordine del mondo, di cui nella sua vita aveva fatto continua esperienza. Il disordine, la disarmonia, l'ingiustizia, la mancanza di un nesso causale lucidamente riconoscibile tra la malvagità dell'uomo e la giusta punizione, dovevano necessariamente trovare un luogo di ricomposizione almeno nell'aldilà. Forse per questo l'oltretomba dantesco ha una struttura così precisa e ordinata, diversamente da quanto, in questo caso, accade invece nel testo biblico, che presenta l'aldilà come il regno del caos, senza attribuirgli alcuna forma particolare. Si confronti per esempio il *Libro di Giobbe* al capitolo 10:

E non son poca cosa i giorni della mia vita?  
Lasciami, sì ch'io possa respirare un poco  
prima che me ne vada, senza ritornare,  
verso la terra delle tenebre e dell'ombra di morte,  
terra di caligine e di disordine,  
dove la luce è come le tenebre.  
(*Giobbe* 10, 20-22)

#### *Quale ordine?*

Ma per Dante, anche l'oltretomba è opera di Dio, come è scritto sulla porta dell'Inferno (“fecemi la divina potestate, la somma sapienza e 'l primo amore” If. III, 5-6). L'ordine, dunque, benché “corrotto” (per riutilizzare l'espressione di Pg. XVII, 126) si impone di necessità anche all'Inferno. Ed è un ordine contemporaneamente etico e geometrico, prova visibile dell'esistenza di un disegno provvidenziale del geometra-Dio, come lo aveva definito Tommaso d'Aquino. Lo spiega magistralmente Guglielmo Gorni:

“A questa stregua, se l'Inferno è un cono generato nella sfera terrestre, la sua sezione verticale è naturalmente un triangolo. E un triangolo, nella cavità sotterranea delle eterne pene, non può essere un puro accidente: è bensì immagine della trinità. “Immagine perversa”: e difatti è un triangolo capovolto, poggiante su uno dei vertici, non già su un lato preso come base. Un triangolo che, a guisa di Lucifero, si vede “le gambe in sù tenere” (If. XXXIV, 90) nell'emisfero boreale.” (Guglielmo Gorni, *Lettera nome numero, L'ordine delle cose in Dante*, Il Mulino, 1990, p. 140)

Di forma triangolare è poi non solo la sezione verticale dell'Inferno, ma anche quella del Purgatorio, mentre tagliando orizzontalmente i due regni si ottengono dei cerchi, che corrispondono grosso modo a quelli che nell'Inferno sono chiamati “cerchi” e nel Purgatorio “cornici” e sono i luoghi dedicati alla punizione delle anime.<sup>94</sup>

Dante, quindi, ha una fiducia assoluta nella geometria, alla quale affida la scrittura divina dell'universo, un universo scritto in segni geometrici, verrebbe da dire, parafrasando Galilei<sup>95</sup>. Una fiducia nella geometria che, ovviamente, non esclude l'Aritmetica, perché la Geometria, “bianchissima, in quanto è senza macula d'errore e certissima” (Cv. II, XIII, 27) è comunque basata su strumenti matematici, è arte del quadrivio e come le altre discipline di questo ambito trae la sua luce proprio dall'Aritmetica. Infatti, come Dante dice nel *Convivio*, “lo cielo del Sole si può comparare a l'Aritmetica (...) del suo lume tutte s'illuminano le scienze” (Cv. II, XIII, 15-19).

### ***La geometria euclidea***

Della Geometria, Dante conosce quella del suo tempo, che era basata essenzialmente su Euclide, attivo ad Alessandria nel III secolo a. C. e tradotto dall'arabo in latino già nei primi decenni del dodicesimo secolo<sup>96</sup>. Non a caso finora abbiamo parlato soprattutto di cerchio e triangolo, due figure piane centrali negli *Elementi* di Euclide. Dante sicuramente ammira l'opera del matematico alessandrino, per la sua lucidità e il suo rigore espositivo, organizzata com'era in definizioni, nozioni comuni, postulati, teoremi e

---

<sup>94</sup> In Paradiso troviamo invece una prevalenza del cerchio “e dico 'cerchio' largamente ogni ritondo, o corpo o superficie”, come apparirà nel seguito dell'argomentazione.

<sup>95</sup> “Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola” Galileo Galilei, *Il Saggiatore*.

<sup>96</sup> L'autore della prima traduzione in latino degli *Elementi* di Euclide è Adelardo di Bath, scienziato e filosofo inglese della cui attività si hanno testimonianze intorno alla prima metà del secolo XII.

dimostrazioni che poi a loro volta servivano come base per altri teoremi, secondo un ordine logico molto serrato e uno stringente metodo deduttivo<sup>97</sup>. Sulla scorta degli *Elementi* di Euclide Dante, per esempio, sa che

- in un semicerchio, ogni triangolo inscritto e avente un lato coincidente con il diametro è sempre un triangolo rettangolo (Pd. XIII, 101-102). L'osservazione risaliva a Talete, ma il problema è ripreso da Euclide (*Elementi*, III, 31);

- poiché in un triangolo la somma degli angoli interni è  $180^\circ$ , non possono esserci due angoli ottusi in un triangolo (Pd. XVII, 13-18).

Anche qui il riferimento è Euclide (*Elementi*, I, 32), ma l'osservazione si trova anche in Aristotele (*Metafisica*, 1051 a 24-25); in Euclide, è direttamente collegata al quinto postulato: "Se una retta che taglia altre due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti".

## SIMMETRIA

### *Lucifero e Dio*

A ben guardare, la simmetria è forse un caso particolare dell'ordine che abbiamo descritto prima, e giustifica tutta una serie di corrispondenze geometriche che hanno una valenza anche simbolica. Se consideriamo ad esempio la creatura che abita il centro della Terra, conficcata proprio nel cuore de "l'infima lacuna dell'universo" (Pd. XXXIII, 22-23), nel posto, cioè, in assoluto più lontano da Dio, troviamo che questa creatura ha tre teste, orribili, di tre colori diversi:

S'el fu sì bel com' elli è ora brutto,  
e contra 'l suo fattore alzò le ciglia,  
ben dee da lui procedere ogne lutto.

Oh quanto parve a me gran meraviglia  
quand' io vidi tre facce a la sua testa!  
L'una dinanzi, e quella era vermiglia;

---

<sup>97</sup> "La stringente deduzione di proposizioni e teoremi dai cinque postulati iniziali lascia intravedere la potenza dell'intelletto umano di giungere a formulare verità universali senza necessariamente affidarsi alla teologia." Trombetti e Zollo, *Suggestioni matematiche della Divina Commedia*, Rogiosi, 2021.

l'altr'eran due, che s'aggiugnieno a questa  
sovresso 'l mezzo di ciascuna spalla,  
e sé giugnieno al loco de la cresta:

e la destra pareva tra bianca e gialla;  
la sinistra a vedere era tal, quali  
vegnon di là onde 'l Nilo s'avvalla.

Sotto ciascuna uscivan due grand' ali,  
quanto si convenia a tanto uccello:  
vele di mar non vid' io mai cotali.

Non avean penne, ma di vispistrello  
era lor modo; e quelle svolazzava,  
sì che tre venti si movean da ello:

quindi Cocito tutto s'aggelava.  
Con sei occhi piangèa, e per tre menti  
gocciava 'l pianto e sanguinosa bava.  
(If. XXXIV, 34-54)

Simmetricamente, nel punto che rispetto alla terra è il più lontano dell'universo, oltre tutti i cieli, Dante incontra invece Dio, che gli appare come una visione triplice di cerchi: la Trinità.

Ne la profonda e chiara sussistenza  
de l'alto lume parvermi tre giri  
di tre colori e d'una contenenza.  
(Pd. XXXIII, 115-117)

Come si vede facilmente, i tre cerchi, "di tre colori e d'una contenenza", corrispondono perfettamente, fuorché nella forma, stavolta di cerchio e perciò in sé perfetta, alle tre teste dell'anti-Dio conficcato nel centro della Terra. La simmetria rimarca l'abissale distanza tra i due esseri, il male assoluto e l'amore sconfinato, ai due antipodi dell'universo.

### ***L'Universo***

Universo che poi, a guardar bene, ha esso stesso una forma simmetrica, se è vero che, prendendo come asse di simmetria il Primo Mobile, al di là di questo troviamo le nove sfere dell'universo trascendente che ricalcano, rovesciandola, la corrispondente struttura delle nove sfere dell'universo



sensibile. Anzi, proprio questa forma mette meglio in risalto la posizione antipodale reciproca di Lucifero e di Dio.

### **La Terra**

Del resto, su una struttura simmetrica oppositivo- antipodale si organizza anche la forma della Terra secondo Dante, con Gerusalemme e la montagna del Purgatorio l'una agli antipodi dell'altra, e con Inferno e Purgatorio che sono praticamente l'uno il calco dell'altro.

## **GEOMETRIA: LA DEFINIZIONE DI DANTE**

### ***I fondamenti della geometria euclidea: punto e cerchio***

Cerchiamo ora di scendere un po' nei particolari, di conoscere nel dettaglio gli enti geometrici più cari a Dante. Ci viene in soccorso subito la definizione del II libro del *Convivio*:

“La Geometria si muove intra due repugnanti a essa, sì come 'l punto e lo cerchio - e dico 'cerchio' largamente ogni ritondo, o corpo o superficie -; ché, sì come dice Euclide, lo punto è principio di quella, e, secondo che dice, lo cerchio è perfettissima figura in quella, che conviene però avere ragione di fine. Sì che tra 'l punto e lo cerchio sì come tra principio e fine si muove la Geometria, e questi due a la sua certezza repugnano; che lo punto per la sua indivisibilità è immensurabile, e lo cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto” (Cv. II, XIII, 26-27).

Gli *Elementi* di Euclide si aprivano proprio con il punto, che è materia della prima definizione, e si chiudevano con il cerchio, di cui tratta l'ultimo problema del libro. Dunque correttamente Dante ci fa notare che tutta la Geometria sta tra questi due snodi concettuali.

Per il *Paradiso* di Dante si può forse affermare altrettanto. Il cerchio infatti è la figura geometrica protagonista del Paradiso; essa fa la sua comparsa per la prima volta nel canto X. Infatti, benché anche il Purgatorio e l'Inferno fossero strutturati su base circolare, il percorso di Dante in quei due regni non era mai completamente tale, perché il suo passaggio dall'uno all'altro livello avveniva prima che egli avesse girato tutta la circonferenza. Cerchi completi invece sono in *Paradiso* quelli del cielo del sole, cielo dei sapienti, che si presentano a Dante come tre girotondi di anime intorno a lui e Beatrice. Nel cerchio Tommaso, protagonista del canto, viene a trovarsi tra il

suo maestro, Alberto Magno, e il suo avversario, Sigieri di Brabante<sup>98</sup>, come a voler significare che la perfezione del cerchio ricomponesse in armonia ogni ostilità. Questi tre cerchi sono come la prefigurazione di quelli che caratterizzeranno poi la visione di Dio, ove Dante percepisce, come abbiamo visto, le tre persone della Trinità come tre cerchi (i “tre giri di tre colori e d'una contenenza” di Pd. XXXIII, 116-117). Ed è ovvio, dato che il cerchio era, secondo Dante, “perfettissima figura”<sup>99</sup>. E notiamo intanto che però qui i tre cerchi girano intorno a Dante e Beatrice: la visione della verità non è statica, come Dante poteva osservare nelle tavole allegare agli *Elementi* di Euclide, ma dinamica, e vedremo che questo è un elemento di grande importanza. Ma il cerchio non è l'unica possibilità geometrica che Dante sfrutta per descrivere Dio; si rivolge, com'era forse naturale, anche al punto, “principio” primo della geometria euclidea, secondo la quale “il punto è ciò che non ha parti”, una sorta di oggetto ideale senza dimensioni, il principio da cui ha inizio ogni altra osservazione geometrica nel sistema euclideo. Non stupisce quindi che, vedendo Dio per la prima volta riflesso negli occhi di Beatrice, Dante abbia proprio la visione di un punto:

un *punto* vidi che raggiava lume  
acuto sì, che 'l viso ch'elli affoca  
chiuder conviensi per lo forte acume...  
Pd. XXVIII, 16-18)

**“...repugnanti ad essa...”**

Il problema di Dante, però, è che questi due estremi, nel senso strutturale, della Geometria euclidea (ne costituiscono infatti l'inizio e la fine), sono anche due “repugnanti ad essa”, cioè vengono in contrasto con quell'immagine della disciplina “bianchissima ... e certissima” che Dante ha definito poco sopra. Anzi, fa riflettere il fatto che Dante, per parlare dei misteri del Paradiso, abbia scommesso tutto, dal punto di vista geometrico,

---

<sup>98</sup> Siamo nello Studio di Parigi nella seconda metà del Duecento e si consuma uno scontro tra tomismo e averroismo. I seguaci di Tommaso, a sua volta allievo di Alberto Magno, propendono per una ripresa originale delle idee di Aristotele, contrapponendosi a quelli che, come Sigieri, si affidano piuttosto al commento che di Aristotele aveva fatto Averroé, filosofo arabo, che Tommaso considera solo un commentatore infedele. L'arcivescovo di Parigi, Stefano Tempier, nel 1277 condanna sia le posizioni tomiste sia quelle averroiste.

<sup>99</sup> Del resto anche nel canto XIII del *Paradiso* Dante paragona, sempre per bocca di san Tommaso, l'acquisizione di una verità di fede alla figura del cerchio, che si fa, quindi, immagine della verità (“vedrai il tuo credere e 'l mio dire/ nel vero farsi come cerchio in tondo”. Pd. XIII, 50-51).

proprio su quelle due figure che facevano penetrare all'interno della perfezione della geometria l'ombra del dubbio.

Per quanto riguarda il cerchio infatti, il problema classico era quello della quadratura (Pd. XXXIII 133-135). Quadrare un cerchio significava disegnare il quadrato che avesse la stessa area di quel cerchio (o, in alternativa, disegnare un quadrato il cui perimetro avesse la stessa lunghezza di quella circonferenza), usando come strumenti solo la riga non graduata e il compasso. In generale si quadravano le figure per conoscerne più facilmente l'area, dato che l'area del quadrato è facilmente calcolabile. Sin dall'antica Grecia i matematici erano in grado di quadrare tutte le figure piane con contorni rettilinei, e anche alcune figure che avessero qualche lato curvilineo, ma per trasformare il cerchio in un quadrato c'è bisogno di  $\pi$  (pi greco), che indica il rapporto tra la misura della circonferenza e il diametro e che è un numero trascendente, con indefinite cifre dopo la virgola che non hanno alcuna periodicità. Molti studiosi sin dall'antichità si erano cimentati con questo problema, senza venirne in effetti a capo; una soluzione credette di averla trovata Briso o Brisone, matematico greco, ma in Pd. XIII, 125 Dante lo prende in giro per la sua presunzione immotivata, dato che, nonostante i suoi calcoli, il problema restava senza soluzione. Molto vicino ad una risposta, in realtà, c'era arrivato Archimede, ma è probabile che Dante non lo conoscesse, perché fu tradotto abbastanza tardi.

Analogamente, anche il punto era figura problematica all'interno della Geometria classica, perché non è misurabile, sfugge pertanto all'indagine conoscitiva dell'uomo.

***“...il principio ond'elli indige...”***

Perché Dante aveva dunque scelto proprio il punto e il cerchio come immagine di Dio? Forse appunto per quella natura incommensurabile che punto e cerchio continuavano ad avere per l'intelligenza dell'uomo: Dante, fortemente consapevole del limite gnoseologico connesso intimamente alla natura umana, avrà probabilmente pensato che quel tanto di matematicamente irrisolto che rimaneva all'interno della pur lucidissima Geometria, doveva essere tale proprio perché legato ai misteri ultimi - e perciò più incomprensibili - dell'universo. Voglio dire, insomma, che la scoperta del “principio ond'elli (il geometra) indige” (Pd. XXXIII, 135) per Dante restava irraggiungibile per via razionale, mentre poteva esserlo per via mistica, secondo il percorso ultramondano da lui stesso seguito.

***“...non capere in triangol due ottusi...”***

Non a caso Thibaud Bernard-Helis è convinto che quando Dante dice a Cacciaguida: “O cara piota mia che sì t'insusi,/ che come veggion le terrene menti/ non capere in triangolo due ottusi,/ così vedi le cose contingenti anzi

che sieno in sé...” (Pd. XVII, 13-17), in realtà gli sta dicendo che le capacità visive in terra e in cielo sono completamente diverse: le terrene menti non possono che sperimentare la validità del principio di Euclide che non accorda al triangolo che un solo angolo ottuso, mentre, allo stesso modo e con la stessa lucida ovvietà percettiva (questo significherebbe il “come” secondo Bernard-Helis) le anime del Paradiso verificano una dimensione dello spazio superiore, dove non è valida la geometria euclidea. E nelle geometrie non euclidee il postulato degli angoli ottusi perde di senso, perché il nostro triangolo non è più sul piano ma in uno spazio curvo.

### ***La curvatura dello spazio***

Poteva Dante concepire la curvatura dello spazio e quindi superare Euclide? Alcuni scienziati negli ultimi cento anni si sono espressi in questo senso (lo dicono i matematici, da Andreas Speiser a Mark Peterson, fino al nostro Piergiorgio Odifreddi; lo dicono i fisici, come il romeno Horia-Roman Patapievici, o gli italiani Carlo Rovelli e Marco Bersanelli)<sup>100</sup>, mentre altri frenano questa interpretazione. Come poteva Dante arrivare a sfiorare l’idea della curvatura dello spazio e della quarta dimensione, fino ad immaginare addirittura un concetto vicino a quello dell’ipersfera einsteiniana?<sup>101</sup> Forse

---

<sup>100</sup> Andreas Speiser, matematico svizzero, fu il primo nel 1925; Mark Peterson nel 1979, in un articolo su *American journal of Physics*, azzarda l’idea che la forma dell’universo per Dante sia una tre-sfera che si trova in un mondo a quattro dimensioni; l’idea è stata rilanciata dal fisico romeno Horia-Roman Patapievici nel 2004 e recentemente in una serie di convegni da Marco Bersanelli, professore ordinario di Astronomia e Astrofisica presso l’Università degli Studi di Milano. Bersanelli è fra gli iniziatori e fra i principali responsabili scientifici della missione spaziale Planck dell’ESA, la quale ha ottenuto risultati con precisione senza precedenti per la cosmologia e l’astrofisica millimetrica, studiando il fondo dell’universo

<sup>101</sup> C’è addirittura un prete e matematico russo del primo Novecento, uno dei tanti intellettuali che hanno portato il loro amore per Dante nei campi di concentramento della Siberia staliniana, che in un’opera del 1922, *Gli immaginari in geometria*, si dichiara convinto “che la coscienza medievale sia più vicina al modo di pensare del XX secolo di quanto non lo sia l’ideologia meccanicistica del Rinascimento” (Natalino Valentini, “Dante e gli immaginari in geometria di Pavel Florenskij. Tra Medioevo e scienza contemporanea” in *Dante nei filosofi del Novecento*, a cura di Oreste Tolone, Morcelliana, 2021). Nella stessa opera, Florenskij propone addirittura l’idea che lo spazio in cui si muove Dante nella Commedia sia una superficie unilaterale non euclidea, quindi una superficie di Riemann, in particolare un nastro di Möbius. Sentiamo la sua spiegazione: “Entrambi i poeti mantengono per tutto il tempo della discesa la posizione verticale, con la testa rivolta verso il luogo da cui sono scesi, cioè verso l’Italia, e i piedi verso il centro della Terra. Quando, però, i poeti raggiungono indicativamente la cintola di Lucifero, essi si capovolgono

perché, come dice per esempio Horia-Roman Patapievici, per un uomo del Medioevo non era così impossibile arrivare a estendere i problemi della geometria ad una superficie curva?

Proviamo a confrontare Dante con Bonaventura da Bagnoregio, e vi troveremo delle convinzioni geometriche non troppo diverse: “Rursus reverentes dicamus: quia igitur esse purissimum et absolutum, quod est simpliciter esse est primarium et novissimum. Quia aeternum et praesentissimum, ideo omnes durationes ambit et intrat, quasi simul existens earum centrum et circumferentia. Quia simplicissimum, ideo totum intra omnis et totum extra, ac per hoc “est sphaera intelligibilis, cuius centrum est ubique et circumferentia nusquam”. Quia actualissimum et immutabilissimum, ideo “stabile manens moveri dat universa”. Quia perfectissimum et immensum, ideo est intra omnia, non inclusum, extra omnia, non exclusum, supra omnia, non elatum, infra omnia, non prostratum. Quia vero est summe unum et omnimodum, ideo est *omnia in omnibus*, quamvis omnia sint multa et ipsum non sit nisi unum.”<sup>102</sup> Si noti del

---

all'improvviso, volgendosi con i piedi verso la superficie della Terra per dove sono entrati nel regno degli inferi e con il capo nel senso opposto (...) Dunque, avendo proceduto sempre in linea retta ed essendosi capovolto una sola volta lungo il cammino, il poeta giunge al luogo di partenza nella stessa posizione in cui l'aveva lasciato. Di conseguenza, se strada facendo non si fosse capovolto, lungo la retta egli sarebbe giunto al luogo di partenza a testa in giù. Perciò la superficie su cui Dante si muove è tale che, con un solo capovolgimento di direzione, la retta che vi si trovi porta un ritorno al punto precedente in posizione eretta, laddove un moto rettilineo senza inversioni riporta al punto di partenza un corpo capovolto. Evidentemente si tratta di una superficie che, primo, in quanto contiene rette chiuse è un piano di *Riemann*, e secondo, in quanto capovolge la perpendicolare che su di essa si muove, è una superficie *unilatera*. Tali condizioni sono sufficienti a caratterizzare geometricamente *lo spazio di Dante come conformato* alla geometria ellittica.” (Pavel Florenskij, *Gli immaginari in geometria*, traduzione di Natalino Valentini)

<sup>102</sup> “Insistendo in questa prospettiva, diciamo: Egli è, insieme, l'essere purissimo ed assoluto, ossia è semplicemente l'essere, è l'essere primo ed ultimo - e perciò è origine di tutte le cose e loro compimento finale; Egli è, insieme, l'essere eterno e sempre attualmente presente - e perciò abbraccia e compenetra tutte le cose che perdurano nel tempo: e, per così dire, il loro centro e la loro circonferenza; Egli è, insieme, semplicissimo e grandissimo - e perciò è tutto dentro tutte le cose ed è tutto al di fuori di tutte le cose; “è una sfera ideale, che ha il centro dappertutto e la circonferenza in nessuna parte”; Egli è, insieme, sempre totalmente in atto e assolutamente immutabile - e perciò, “rimanendo immobile, comunica il moto a tutto l'universo”; Egli è insieme perfettissimo ed immenso - e perciò è dentro tutte le cose, ma non racchiuso in nessuna; è fuori di tutte le cose, ma non escluso da nessuna; è al di sopra di tutte le cose, ma non sperduto nella sua altezza; è al di sotto di tutte le cose, ma non soggiogato da nessuna; Egli è, insieme, sommamente uno ed

resto che, se Dante cita Bonaventura, a sua volta Bonaventura cita Alano di Lilla, in particolare la regola VII delle sue *Regulae Theologiae*, dove pure Dio è una sfera.

Siamo nel 1259. Mancano sei anni alla nascita di Dante e il contesto culturale del poeta contempla evidentemente questa possibilità “paradossale” di descrivere Dio.

### **Punto e volume**

Tanto in Dante quanto in Bonaventura, infatti, la raffigurazione geometrica di Dio si basa su una serie di paradossi spaziali. Vediamo alcuni di quelli più suggestivi nei versi danteschi: innanzitutto, il fatto che il punto-Dio sia in qualche passo del *Paradiso* un punto e altrove un volume, ovvero una figura sferica, se è vero che la parola “volume” deriva dal verbo latino *volvo* ed ha in sé l’idea della sfericità, della circolarità. Il primo a parlare di volume a Dante è l’avo Cacciaguada, che gli dice di aver saputo del suo arrivo contemplando la mente di Dio, che è una sorta di grande libro (volume, appunto), dove sono impressi a lettere indelebili tutti i destini dell’umanità:

Grato e lontano digiuno,  
tratto leggendo del *magno volume*  
*du' non si muta mai bianco né bruno,*  
solvuto hai, figlio, dentro a questo lume  
in ch’io ti parlo...  
(Pd. XV, 49-52)

Bisogna essere molto attenti all’utilizzo che Dante fa nella sua opera delle parole “libro” e “volume”. Sono sempre anche immagini della mente, ma, mentre il libro è la mente dell’uomo (il “libro della memoria” di *Vita Nuova*, I, 1), una realtà lineare in cui l’asse del tempo si snoda da un prima a un poi, secondo una successione cronologica che assimila la linea del tempo al volgersi naturale della pagina, il volume è la mente di Dio, in cui “tutti li tempi son presenti” di Pd. XVII, 18.

Non a caso più avanti, quando lo stesso Dante è di fronte a Dio, torna a presentarsi l’immagine del volume<sup>103</sup>:

---

infinitamente vario - e perciò è tutto in tutte le cose, benché le cose siano molteplici ed Egli, invece, sia esclusivamente uno.” Bonaventura da Bagnoregio, *Itinerarium mentis in Deum*, V, 8; traduzione di P.S. Olgiati da San Bonaventura, *L’ascesa a Dio*, a cura di P. Efrem Bettoni, Milano, Edizioni O.R. 1974.

<sup>103</sup> In questi versi mi sembrano particolarmente significativi i lemmi del campo semantico del libro (“legato” o “si squaderna” sono verbi che evocano la fabbricazione stessa del libro, con fascicoli, quaderni appunto, cuciti insieme), ma

Nel suo profondo vidi che s'interna,  
*legato con amore in un volume,*  
ciò che per l'universo *si squaderna*:

sustanze e accidenti e lor costume  
*quasi conflati insieme*, per tal modo  
che ciò ch'i' dico è un semplice lume.

La forma universal di questo nodo  
credo ch'io vidi...  
(Pd. XXXIII, 85-92)

Nei versi seguenti è descritta la prima percezione che Dante ha di Dio, ancora di lontano, prima di poterlo avvicinare grazie a san Bernardo. Si tratta di una visione molto interessante:

E com' io mi rivolsi e furon tocchi  
li miei da ciò che pare in quel volume,  
quandunque nel suo giro ben s'adocchi,

un punto vidi che raggiava lume  
acuto sì, che 'l viso ch'elli affoca  
chiuder conviensi per lo forte acume...  
(Pd. XXVIII, 13-18)

Sono versi che in parte abbiamo già citato, ma allargando il focus anche sulla terzina precedente, si vede bene come per Dante è pressoché la stessa cosa indicare Dio con l'immagine del punto o con quella del volume, come se queste figure coincidessero. E la coincidenza di queste figure non è possibile se non in uno spazio che prevede la curvatura.<sup>104</sup> Inoltre, la stessa struttura dell'universo, fatta appunto di volumi/sfere concentriche e poi tutte insieme ricomprese all'interno del punto-Dio "che include ciò da cui elli è incluso", non è pensabile se non all'interno di uno spazio curvo.

---

anche quel "conflati insieme" che già fa pensare a una realtà geometrica di tipo sferico.

<sup>104</sup> Odifreddi lo spiega con l'esempio del fiore: "se la Terra si aprisse come un fiore, i paralleli settentrionali circonderebbero quelli meridionali, e il Polo Nord si dispiegherebbe intorno a tutto."

### ***La forma general di Paradiso***

E infatti, il problema che la dantologia ha avuto per secoli è stato proprio quello della rappresentazione dell'universo come viene descritto alla fine della terza cantica.

Perché l'universo dantesco non è in realtà come è stato sempre rappresentato e come ancora oggi è raffigurato nei nostri libri di testo, ovvero una figura piana caratterizzata da cerchi concentrici con una sorta di strana costruzione sopra al Primo Mobile, di cui non si capisce la coerenza strutturale con i cieli sottostanti, ma è una doppia serie di sfere concentriche che si dipanano, di qua e di là dal Primo Mobile, secondo una disposizione che va dalla più grande alla più piccola. Dante insomma dal Primo Mobile può vedere, a seconda di dove si volti per guardare, le sfere dell'universo sensibile concentriche alla Terra, e dall'altra parte, le corrispondenti (dicevamo prima, simmetriche, appunto) sfere dell'universo ultrasensibile. Da una parte, il centro è la Terra, infima lacuna dell'Universo, dall'altra è il punto-Dio. La Terra è perciò, di tutto l'universo, il punto più lontano da Dio. Se ci concentriamo poi sulla velocità di rotazione delle sfere, è presto detto: la Terra è ferma ("La natura del mondo, che quieta/il mezzo e tutto l'altro intorno move..." Pd. XXVII, 106-107), mentre la velocità delle altre sfere aumenta progressivamente, man mano che ci si allontana dalla Terra: anche oltre il Primo Mobile, benché ora le dimensioni vadano diminuendo, la velocità di rotazione aumenta in modo inversamente proporzionale alla grandezza della sfera.

### ***Il movimento***

E questo movimento ci porta più vicino a quella che appare come la caratteristica essenziale dell'universo dantesco, perché questo universo non è una figura piatta disegnata sul piano, ma è una realtà viva, pulsante, in movimento appunto. "El'è quel mare al qual tutto si move ciò ch'ella cria e che natura face." (Pd. III 86-87)<sup>105</sup> Per esempio, quando Dante si accosta alla sede dei beati, vede dapprima un fiume di luce, che solo dopo, sotto ai suoi occhi, assume la forma della candida rosa. Intorno alla candida rosa, poi, c'è tutto un pulsare e uno scintillare di angeli, per i quali Dante ricorre alla similitudine con l'andirivieni delle api intorno all'alveare:

In forma dunque di candida rosa  
mi si mostrava la milizia santa  
che nel suo sangue Cristo fece sposa;

---

<sup>105</sup> Lo afferma Piccarda nel canto III per spiegare a Dante come la volontà di tutte le anime del Paradiso tenda a conformarsi alla volontà di Dio; del resto parole del tutto simili aveva usato Beatrice nel I canto ai vv. 103-114.



ma l'altra, che volando vede e canta  
la gloria di colui che la 'nnamora  
e la bontà che la fece cotanta,

sì come schiera d'ape che s'infiora  
una fiata e una si ritorna  
là dove suo labbro s'insapora,

nel gran fior discendeva che s'addorna  
di tante foglie, e quindi risaliva  
là dove 'l s'io amor sempre soggiorna.

Le facce tutte avean di fiamma viva  
e l'ali d'oro, e l'altro tanto bianco,  
che nulla neve a quel termine arriva.

Quando scendean nel fior, di banco in banco  
porgevan de la pace e de l'ardore  
ch'elli acquistavan ventilando il fianco.  
(Pd. XXXI, 1-18)

***Il pellegrino: tre capriole prima dell'amore***

Il movimento, del resto, riguarda non solo gli elementi che divengono via via oggetto della conoscenza mistica di Dante, ma anche il percorso stesso del pellegrino. Il procedere di Dante nel suo cammino nell'oltretomba è assimilabile a una linea spezzata, con frequenti svolte, per lo più a sinistra nell'Inferno e a destra nel Purgatorio, e a una linea retta ascensionale in Paradiso nel suo trasumanare verso Dio. Una linea tracciata con il piede e la fatica del cammino nei primi due regni<sup>106</sup>, grazie poi all'energia trasmessa dagli occhi di Beatrice nei cieli del Paradiso.

Ma solo alla fine Dante si muove finalmente di moto circolare:

ma già volgeva il mio disio e 'l velle  
sì come rota ch'igualmente è mossa,  
l'amor che move 'l sole e l'altre stelle  
(Pd. XXXIII, 143-145).

---

<sup>106</sup> Non posso a questo proposito non citare Osip Mandel'stam, che in *Conversazione su Dante* lo dice, come suo solito, con parole straordinarie: "L'Inferno, e ancor più il Purgatorio, celebrano la camminata umana, la misura e il ritmo dei passi, il piede e la sua forma".

Dante ora si trova a muoversi “come rota ch’igualmente è mossa”, cioè venendo in definitiva assimilato alle sfere celesti.

Per arrivare a questo traguardo, inoltre, Dante per tre volte compie un movimento particolarissimo, che potremmo definire “ribaltamento” (traggo il ragionamento in buona parte da un prezioso contributo di Thibaud Bernard-Helis, che mi è stato gentilmente concesso dall’autore anche se non ancora pubblicato).

Il primo ribaltamento è il capovolgimento alto-basso, descritto nel canto XXXIV dell’Inferno: arrivato insieme a Virgilio di fronte all’orribile mole di Lucifero, Dante, aggrappato alle spalle del maestro, comincia la scalata del corpo di Satana, necessaria per attraversare il centro della Terra, in cui il demonio è conficcato. Ed ecco che, giunti che sono a metà del corpo, grazie ad una sorta di capriola, i due compagni di viaggio invertono la loro posizione e vengono “partoriti” nell’altro emisfero. Dante all’inizio si trova spaesato e crede che Virgilio voglia tornare indietro verso l’Inferno; solo in un secondo momento comprende che questo dispositivo di capovolgimento era necessario per oltrepassare il centro della terra.

Quando noi fummo là dove la coscia  
si volge, a punto in sul grosso de l’anche,  
lo duca, con fatica e con angoscia,

volve la testa ov’elli avea le zanche,  
e aggrappossi al pel com’om che sale,  
sì che ‘n inferno i’ credea tornar anche.

(If. XXXIV, 76-81)

Il secondo caso di capovolgimento è quello segnalato dalla presenza di un doppio albero rovesciato negli ultimi canti del Purgatorio (precisamente nel XXII e nel XXXII). L’albero capovolto dell’Eden, più che un rovesciamento fisico, stavolta indica la conquista di una dimensione ulteriore dell’umano, un ritorno del pellegrino al luogo “fatto per proprio dell’umana specie” (Pd. I, 57), dove gli uomini hanno facoltà potenziate, che con la cacciata dall’Eden hanno perduto. Thibaud Bernard-Helis ne parla in termini geometrici come di una riconquista dell’asse z, una dimensione in più dell’essere umano. Supponiamo, dice lo studioso francese facendo riferimento ancora all’albero capovolto, che la visione di quest’albero sia indizio di una verità momentaneamente nascosta alla vista, come nel mito della caverna di Platone: vediamo le radici verso l’alto perché questa visione “invertita” non è che lo specchio imperfetto di una verità posta oltre, al di là di ciò che percepiscono i nostri sensi. Il posizionamento verso l’alto della base

dell'albero mostra che il principio in cui esso affonda le sue radici e da cui attinge la sua linfa vitale è altrove: dunque è a quel principio che bisogna salire, e i rami dell'albero non sono che una scala. D'altra parte Virgilio aveva parlato anche di Lucifero come di una scala. Quindi, in definitiva, l'albero capovolto è un segnale: indica che c'è un altrove da raggiungere, perché la base di quell'albero appartiene ad una dimensione diversa, ed occorre fare anche in questo caso uno sforzo di ribaltamento, più che altro concettuale, per riposizionarsi correttamente. Ora, ampliando il contributo di Bernard-Helis, vorrei anche sottolineare che questa immagine dell'albero, qui così criptica, è svelata nella cantica successiva:

e come il tempo tegna in cotal testo  
le sue radici e ne li altri le fronde,  
omai a te può esser manifesto.  
(Pd. XVII, 118-120)

Le radici, dunque, sono nel Primo Mobile e da quello dipende tutto il mondo sensibile.

Non a caso, c'è una continuità di questo tema tra gli ultimi canti del *Purgatorio* e il primo del *Paradiso*, perché quando Beatrice spiega a Dante le sensazioni legate al *trasumanare*, fa di nuovo riferimento a questa dimensione ulteriore della percezione, diversa da quella terrestre, e anche in questo caso la motiva come un ritorno a casa, la riconquista di un luogo dove le facoltà dell'uomo raggiungono la loro pienezza:

Tu non se' in terra, sì come tu credi;  
ma folgore, fuggendo il proprio sito,  
non corse come tu ch'ad esso riedi  
(Pd. I, 91-93).

Del resto, lo dice anche Dante, raccontando il modo in cui ha compiuto la sua esperienza mistica. È stato fissando gli occhi di Beatrice:

E sì come secondo raggio suole  
uscir del primo e risalire in suso,  
pur come pelegrin che tornar vuole,  
  
così de l'atto suo, per li occhi infuso  
ne l'immagine mia, il mio si fece ...  
(Pd. I, 49-53)

Ma fissare gli occhi di Beatrice significa voler tornare insieme a lei al luogo da cui entrambi provengono.

Il terzo rovesciamento è un rovesciamento verso l'interno: avviene nel XXXIII del *Paradiso*, quando Dante guardando Dio vede l'immagine dell'uomo, vede in definitiva se stesso.

Penso che Dante su questo punto segua da vicino Bonaventura da Bagnoregio: "Quoniam autem duo gradus praedicti, ducendo nos in Deum per vestigia sua, per quae in cunctis creaturis relucet, manuduxerunt nos usque ad hoc, ut ad nos reintraremus, in mentem scilicet nostram, in qua divina relucet imago; hinc est quod iam in tertio loco, ad nosmetipsos intrantes et quasi atrium forinsecus relinquentes, in sanctis, scilicet anteriori parte tabernaculi, conari debemus per speculum videre Deum"<sup>107</sup> Le analogie con Dante sono impressionanti: vedere Dio è entrare in se stessi, nella parte più intima del sé, rovesciando il senso della ricerca dalle cose create alla mente stessa dell'uomo, dove potremo vedere Dio come in uno specchio. Cioè specchiandoci in lui. E in questo modo, continua Bonaventura con implicito riferimento al San Paolo della Prima lettera ai Corinzi, "videre poteris Deum per te tanquam per imaginem, quod est videre per speculum in aenigmate"<sup>108</sup>. È ancora una visione imperfetta, ma è comunque uno degli ultimi passaggi necessari per una visione totale, per la fusione stessa con Dio.

Dice Bernard-Helis a proposito di questo passaggio: "Noi siamo come entrati nella radice. (...) Dante incontra lo specchio ultimo dell'opera, cioè quando incontra il suo proprio volto nella Trinità. Egli vede prima di tutto i suoi occhi in quelli di Dio. E, rovesciandosi su se stesso come un guanto, egli diviene tramite fusione gli occhi di Dio. Egli diviene lo sguardo dell'Amore che lega le cose tra loro, e muove le stelle (...). L'asse di simmetria si avvolge su se stesso. (...) Beatrice avvisa Dante: tutto ciò che egli vede durante la salita del Paradiso celeste (...) non è che simbolico, tutto ha luogo al di fuori dello spazio e del tempo. Infatti, tutto ha luogo in un punto, che ha per

---

<sup>107</sup> "Le due tappe precedenti, guidandoci a Dio attraverso quelle impronte, per mezzo delle quali Egli risplende nell'universo creato, ci hanno condotto ad un punto importante del nostro cammino: a rientrare, cioè, in noi stessi, nella nostra anima. E qui risplende l'immagine di Dio. D'ora in poi - e siamo ormai alla terza tappa - rientriamo nell'intimità della casa, lasciandoci la porta alle spalle. È come se entrassimo nell'interno del Tabernacolo e precisamente nel primo locale, quello chiamato "il santo". Qui vedremo Dio, come se ci fosse posta innanzi la sua immagine riflessa in uno specchio." Bonaventura da Bagnoregio, cit., III, 1; traduzione di P.S. Olgiati da San Bonaventura, cit.

<sup>108</sup> "potrai vedere Dio attraverso di te come attraverso un'immagine, cioè vederlo attraverso uno specchio in modo imperfetto". Bonaventura, ivi; traduzione mia; il riferimento è a Paolo, I Cor. 13, 12.

qualità quella di essere il solo oggetto geometrico a non avere alcuna dimensione. Tutto ha luogo nell'invisibile, nella radice delle cose." (traduzione mia)

Un'immagine molto pregnante, questa del necessario ribaltamento (un ribaltamento che è, insieme, fisico e gnoseologico): ci aiuta a comprendere che non c'è nulla di statico nell'universo dantesco, a parte la Terra (il che, perciò, non depono particolarmente a favore dell'*aiuola che ci fa tanto feroci* di Pd, XXII, 151), ma tutto si muove animato dall'amore.

Ed eccoci arrivati al cuore della nostra discussione: l'amore è l'energia vitale da cui trae la spinta ogni palpito dell'universo: Guglielmo Gorni ha dimostrato (op. cit. pp. 62-63) che in moltissime occorrenze dell'opera dantesca, quando viene citato l'amore, esso è associato all'idea di movimento, dando vita a frequenti paronomasie di grande intensità. Del resto, Dio è per l'Universo sia fonte dell'amore che origine del movimento, "motor primo" (Purg. XXV 70), secondo le indicazioni di Aristotele. E aristotelica è anche l'idea che la caratteristica principale della natura e degli enti ad essa appartenenti sia il loro essere in movimento: è il concetto di κίνησις (chínesis), che è in senso lato divenire, continuo mutamento.

Non a caso quindi la relazione tra Dio e il moto incessante dell'universo è anche il messaggio finale, espresso dall'ultimo verso del poema: "l'amor che move il sole e l'altre stelle" (Pd. XXXIII, 145). E qui si noti che l'unica parola che lega tra loro il primo e l'ultimo verso del *Paradiso* è il verbo "move", e certo non è un caso. Dunque, mi verrebbe da dire, il superamento dantesco della geometria euclidea è da interpretare soprattutto in questo senso: in Dante infatti le figure dello spazio euclideo prendono vita grazie al soffio vitalizzante dell'amore.

## Bibliografia

Bernard-Helis, Thibaud, *Géométries de Dante*, Conférence pour *Le point, le cercle et la sphère chez Dante Alighieri*, Journée d'étude organisée par Bruno Pinchard et Cécile Le Lay, Université Jean Moulin Lyon 3.

D'Amore, Bruno, *La matematica nell'opera di Dante Alighieri. Spunti biografici a scopo didattico*, Pitagora, 2020

Gorni, Guglielmo, *Lettera nome numero, L'ordine delle cose in Dante*, Il Mulino, 1990

Odifreddi, Piergiorgio, "Immagini dal Paradiso", in *Le Scienze*, ottobre 2011

Rak, Michele, voce "Geometria" in *Enciclopedia dantesca*, Treccani, 1970

Rovelli, Carlo, *L'ordine del tempo*, Adelphi, 2017

Trombetti, Guido e Zollo, Giuseppe, *Suggerimenti matematiche della Divina Commedia*, Rogiosi, 2021

Valentini, Natalino, "Dante e gli immaginari in geometria di Pavel Florenskij. Tra Medioevo e scienza contemporanea" in *Dante nei filosofi del Novecento*, a cura di Oreste Tolone, Humanitas, anno LXXVI n. 1, Morcelliana, 2021

## Contributi on line

*Le point, le cercle et la sphère chez Dante Alighieri*, Journée d'étude organisée par Bruno Pinchard et Cécile Le Lay, Université Jean Moulin Lyon 3 :

<https://www.youtube.com/watch?v=jc4UwvYmzMY>

<https://www.youtube.com/watch?v=R9MGBVVsb0w>

<https://www.youtube.com/watch?v=i6q-uSr2iCA&t=74s>

<https://www.youtube.com/watch?v=J08oGtZTLys>

Bersanelli, Marco, *L'immagine del cosmo dal Medio Evo al XXI secolo*, appunti della lezione del 12 dicembre 2009 (appunti per uso interno non rivisti dall'autore) [www.diesse.org/cm-files/2010/03/30/terza-lezione-percorsi-didattici-alla-luce-de-la-coscienza.pdf](http://www.diesse.org/cm-files/2010/03/30/terza-lezione-percorsi-didattici-alla-luce-de-la-coscienza.pdf)

Oppo, Andrea, *Se la misura di un corpo è un numero immaginario. Florenskij e il concetto di spazio in Dante*, [www.pfts.it](http://www.pfts.it)

Scognamiglio, Biagio, *Dal centro al cerchio, e sì dal cerchio al centro*, [www.matmedia.it](http://www.matmedia.it)

Veiga Frade, Raquel Páscoa da, *Eros platonico e amore dantesco*, tesi di dottorato in discipline filosofiche; relatore: Adriano Fabris; relatore: Maria Filomena Molder, Pisa 2011, <https://run.unl.pt/bitstream/10362/9469/1/TESI%20FINALE.pdf>

**Stefania Meniconi**